RELACION BINARIA

En nuestro lenguaje cotidiano, es frecuente el uso de las frases tales como: "depende de", "familia con", "tan bueno como", "es mayor que", "es igual a", etc., es decir, son frasees que significan nexo, enlace, correspondencia, etc. entre dos objetos. Así tenemos:

César es padre de Diego,
Sofía es más alta que Juana,
25 es menor que 28,
13 es igual a 8 + 5, etc.

En el lenguaje matemático, estas frases nos sugieren la idea de "Relación" siempre que se refieran a uno o dos conjuntos donde es posible establecer vínculos entre sus elementos mediante pares ordenados que cumplan un criterio o condición.

Definición: Dado el producto cartesiano AxB, una relación R de A en B es cualquier subconjunto de AxB

R es una relación de A en B $\Leftrightarrow$ R $\subset$ AxB

Notación: Una relación de este tipo se llama relación binaria y suele denotarse así

R : A $\rightarrow$B

Y se lee: "relación R que se aplica de A hacia B". Recuerde que A es el conjunto de partida y B es el conjunto de llegada.

En toda relación binaria hay:
a) Un conjunto de partida. d) Dominio (primeros componentes de pares ordenados
b) Un conjunto de llegada e) Rango (segundos componentes)
c) Una regla de correspondencia

Ejemplo: Dados los conjuntos: A = {1; 2; 3} y B = {2; 4}. Hallar la Relación definida por "a es menor que b".

Solución:

a) A x B = {(1; 2); (1; 4); (2; 2); (2; 4); (3; 2); (3; 4)}

b) R = {(1; 2); (1; 4); (2; 4); (3; 4)}

c) Un conjunto departida es:
A = {1; 2; 3}

d) El conjunto de llegada es:
B = {2; 4}

e) El dominio de la relación es:
DR = {1; 2; 3}

f) El rango de la relación es:
RR = {2; 4}

g) Su gráfica es:

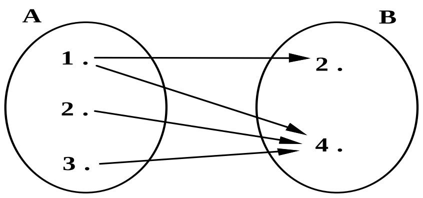


Diagrama Sagital

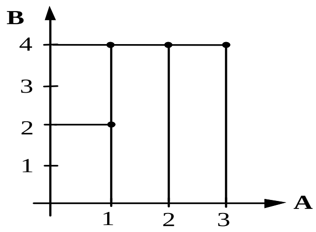


Diagrama Sagital

FUNCIÓN

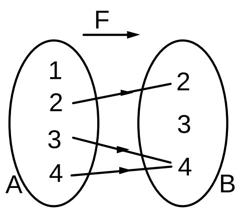
Una función es un conjunto de pares ordenados, es decir una relación pero con una caracteristica especial: al tomar dos pares cualesquiera de aquella, esto no tiende la misma primera componente lo cual significa que si todos los pares de la función son distintos entre sí su primera componente son todas distintas.

Definición: Dada la relación F: A → B, se dice que es una función si sólo si para cada x ∈ A, existe a lo más un y ∈ B que le corresponde a travez de F.

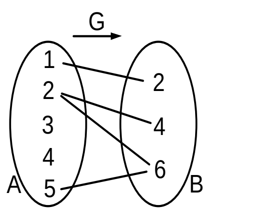
Ejemplo 1: En cada caso, reconocer si l conjunto de pares dados es una función:

- F = {(1;2),(2;5),(3;1),(4;3),(5;1),(6;4)} .... si es función
- G = {(1;6),(2;6),(3;6),(4;6)} .... si es función
- H = {(2;2),(3;1),(4;2),(2;5),(5;3)} .... no es función

Ejemplo 2: De los siguientes diagramas sagitales, reconocer si es o mo una función:



F={(2;2),(3;4),(4;4)}
si es una función



F={(1;2),(2;4),(2;6),(5;6)}
....

PROPIEDAD

Dado un conjunto de pares ordenados F, donde (a;b) y (a;c) son de ellos:
F es una función ⇔ b = c

Ejemplo 3: Calcular m y n para que el conjunto:
F ={(2 ; 9),(3 ; 11),(4 ; m+2),(3 ; 2m+n),(4 ; 4)}
sea una función.

Para que F sea una función, se debe cumplir que:

(3;11) y (3;2m+n) ∈ F → 11 = 2m + n ..(1)
(4;m+2n) y (4;4) ∈ F → m + 2n = 4 ....(2)

Resolviendo (1) y (2): m = 6 ; n = -1
Ejemplo 4: Calcular a y b sabiendo que el conjunto sea una función:
G= {(5 ; 11),(8 ; 27),(13 ; 7),(8 ; 2m+n),(10 ; 20),(13 ; 2m-n)}
Solución:

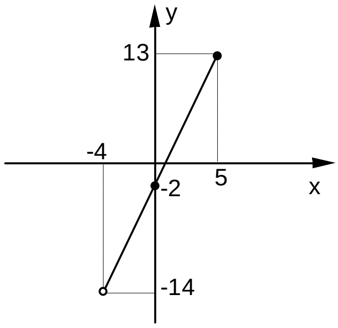
DOMINICO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN
La definición del dominio y el rango de una función es análoga al caso de una relación
Ejemplo 5: Para la función : F={(3 ; 2),(1 ; 0),(2 ; 0),(0 ;1),(4 ; 2)}
Dom(F) ={3 , 1 ; 2 ; 0 ; 4}={0; 1; 2; 3; 4}
Ran(F) = {2 ; 0 ; 0; 1; 2} = {0 ; 1 ; 2}
y para la función : G = {(1 ; 4),(2 ; 4),(3 ; 4),(4 ; 4),(5 ; 4)}
Dom(G) ={1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5} y Ran(G) = { 4 }

EVALUACION DE UNA FUNCION
Dada una función: y = F(x) ; x ∈ Dom(F).
Para x = a (a ∈ Dom(F) se dice que y = F(a) es un valor de la función y ademas el par (a ; F(a)) es un elemento de F.

Ejemplo 6: Considerando la función del ejemplo 35:
F = {(3; 2)(1; 0)(2; 0)(0; 1)(4; 2)}
Supongamos la existencia de una regla de correspondencia: y = F, entonces este conjunto se puede colocar así:
F ={(3 ; F(3)),(1 ; F(1)),(2 ; F(2)),(0 ; F(0)),(4 ; F(4))
Con lo cual:
F(3) = 2, F(1) = 0, F(2) = 0, F(0) = 1, F(4) = 2}

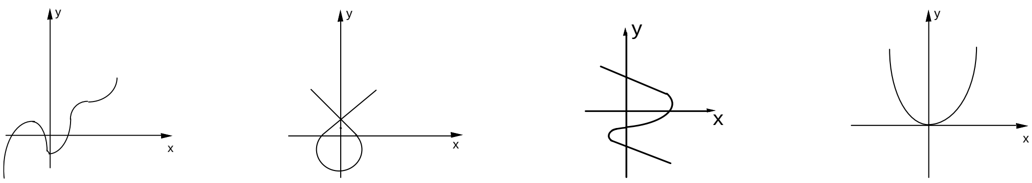
Observese que todos estos valores forman el rango de la función F.

REPRESENTACION GRAFICA DE UNA FUNCION
Ya sabemos que la grafica cartesiana de una relación puede ser un trazo continuo o discontinuo, abierto o cerrado, o talvez una región o porción del plano.
Para una función, su gráfica solo puede ser un trazo (continuo o discontinuo) abierto, que en algunos casos se denomina curva.
Ejemplo 7: Para la función :
F(x) = 3x – 2 ; x ∈ < - 4 ; 5]
Su gráfica, como se verá más adelante, es:



PROPIEDADES: En el plano cartesiano, una curva corresponde a la gráfica de una función sí sólo si cualquier línea vertical intersecta dicha gráfica a lo más en un punto.

Ejemplo 8: Reconocer en cada caso si la gráfica corresponde a uan función:



PRÁCTICA DE CLASE

1. Sean los conjuntos: A = {Trujillo, Huaraz, Chiclayo} B = {Ancash, La Libertad, Lambayeque, Piura} con una relación definida por “a es la capital de b”. Hallar:

a) La relación: ....

b) Conjunto de Partida: c) Conjunto de llegada:

....

d) El dominio e) El rango:

....

f) Diagrama sagital ....

2. Sean los conjuntos: D = {6; 7; 8} y E = {2; 3; 4} con R definida por “a es múltiplo de b”. Hallar

a) D x E

....

b) La Relación:

....

c) El conjunto de partida: d) El conjunto de llegada:

....

e) El Dominio: f) El Rango:

....

g) Diagrama Sagital: h) Diagrama Cartesiano:

3. Dados los conjuntos A = {1; 3; 5} y B = {2; 4; 6} con R definido por “a + b = 7”. Hallar:

a) La Relación:

....

b) El conjunto de llegada c) El conjunto de partida:

....

d) El Dominio e) El Rango:

....

f) Diagrama Sagital g) Diagrama Cartesiano:

4. Sea A = {a, b, c} y la relación en A definida por "a = b". Hallar:

a) A x A

b) La Relación:

....

c) El conjunto de partida d) El conjunto de llegada:

....

e) El Dominio f) El Rango:

....

g) Diagrama Sagital h) Diagrama Cartesiano:

5. Sea C = {5; 8; 10} y la relación en C definido por "a divisible b". Hallar:

a) C x C

b) La Relación:

....

c) El conjunto de partida d) El conjunto de llegada:

....

e) El Dominio f) El Rango:

....

g) Diagrama Sagital h) Diagrama Cartesiano:

6. Hallar la suma de los elementos del dominio de la siguiente relación:

R = {(1;3), (-2; 4), (3; 4), (7; -8), (6; 3)}

a) 15 b) 17 c) 6 d) 7 e) NA

7. Hallar la suma de los elementos del rango de la siguiente relación:

R = {(1;3), (-2; 4), (3; 4), (7; -8), (6; 3)}

a) 15 b) 17 c) 6 d) 7 e) NA

8 Dado el conjunto A = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8} , $R \subset A \times A$; $(a ; b) \in R \Leftrightarrow$ a es divisor de b. Hallar n(R).

a) 10 b) 20 c) 15 d) 25 e) 30

EJERCICIOS PROPUESTOS Nº 06

1. Sea R la relación de: A = {2, 4, 6, 8}
en B = {3,5,7} ; definida por: $(a ; b) \in R$ si y sólo si $a < b$. Indicar el número de elementos de R.

a) 12 b) 7 * c) 6
d) 4 e) 8

2. Dado el conjunto : A = {1 ; 2; 5/2 ; 3}
Encontrar por extensión la siguiente relación en A:
R1 = {(x,y) / x2 + y2 < 8 }

a) R1 = {(1,1), (2,2), (1,2), (2,1)}
b) R1 = {(1,1), (1,2), (1, 5/2), (5/2, 1), (2,1), (2,2)}
c) R1 = {(1,2), (1,3), (3,3)}
d) R1 = {((1,1), (2,2), (5/2, 5/2), (3,3)}
e) R1 = {(1,3), (3,1), (2,2)}

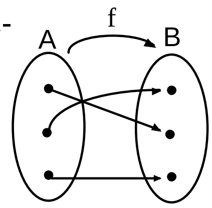
3. ¿Qué conjunto de pares ordenados:

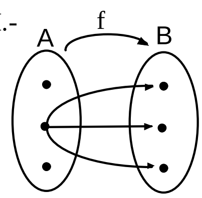
R1 = {(3;2) , (4; 6) , (5; -1)}
R2 = {(1; 2) , (1; 3) , (1; -2)}
R3 = {(1; 4) , (3 ; 4) , (7 ; 3)}
R4 = {(3; 6) , (3; 7) , (4; 7)}

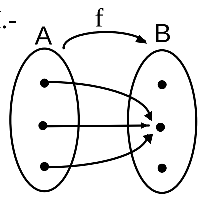
Son funciones:

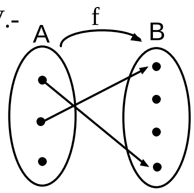
a) R1 $\wedge$ R3 b) R1 $\wedge$ R2 c) R2 $\wedge$ R4
d) R3 $\wedge$ R4 e) N.a

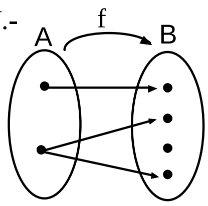
4. ¿Cuáles de los siguientes diagramas de Venn – Euler representen a funciones:

I.-


II.-


III.-


IV.-


V.-


TAREA DOMICILIARIA

1. Dados los conjuntos: A = {2; 3; 8} B = {2; 4; 6; 8} y C = {3; 4; 5; 6}. Hallar:

a) R1 = {(a, b) $\in$ A x B / a < b }
b) R2 = {(a, c) $\in$ A x C / a = c }
c) R3 = {(b, c) $\in$ B x C / b + c = 9}
d) R4 = {(c, a) $\in$ C x A / c – a = 1}
e) R5 = {(b, c) $\in$ B x C / b > c }

* Para cada Relación hallar el producto cartesiano, el conjunto de partida y llegada, el dominio y rango, y los diagramas.
* Determine cuáles son funciones y cuáles no lo son